Utiliser le calcul littéral pour résoudre ou démontrer

Je m'entraîne

19 • $99 = 100 - 1$, donc $99^2 = (100 - 1)^2$
On utilise l'identité remarquable :
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 100$ et $b = 1$.
$(100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$
$(100 - 1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.
Donc $99^2 = 9\,801$.

• $102 = 100 + 2$ et $98 = 100 - 2$
donc $102 \times 98 = (100 + 2) \times (100 - 2)$.
On utilise l'identité remarquable :
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 100$ et $b = 2$.
$(100 + 2) \times (100 - 2) = 100^2 - 2^2$
$(100 + 2) \times (100 - 2) = 10\,000 - 4 = 9\,996$
Donc $102 \times 98 = 9\,996$.

• $31 = 30 + 1$, donc $31^2 = (30 + 1)^2$
On utilise l'identité remarquable :
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 30$ et $b = 1$.
$(30 + 1)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 1 + 1^2$
$(30 + 1)^2 = 900 + 60 + 1 = 961$
Donc $31^2 = 961$.

24 On développe à l'aide de la propriété :

$$k(a + b) = ka + kb.$$

• $A = 3(5 - 4x)$
$A = 3 \times 5 - 3 \times 4x$ soit $A = 15 - 12x$.
• $B = -2(3y - 8)$
$B = -2 \times 3y - (-2) \times 8$ soit $B = -6y + 16$.
• $C = -4(a + 4)$
$C = -4 \times a + (-4) \times 4$ soit $C = -4a - 16$.
• $D = x(3 - x)$
$D = x \times 3 - x \times x$ soit $D = 3x - x^2$.
• $E = t(2t + 5)$
$E = t \times 2t + t \times 5$ soit $E = 2t^2 + 5t$.
• $F = 3y(y - 2)$
$F = 3y \times y - 3y \times 2$ soit $F = 3y^2 - 6y$.

25 On développe à l'aide de la propriété :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

• $G = (x + 7)(x + 3)$
$G = x \times x + x \times 3 + 7 \times x + 7 \times 3$
$G = x^2 + 3x + 7x + 21$
On réduit : $3x + 7x = (3 + 7) \times x = 10x$
Donc $G = x^2 + 10x + 21$.
• $H = (x - 5)(x + 2)$
$H = x \times x + x \times 2 + (-5) \times x + (-5) \times 2$
$H = x^2 + 2x - 5x - 10$.
On réduit : $2x - 5x = (2 - 5) \times x = -3x$
Donc $H = x^2 - 3x - 10$
• $I = (2x + 1)(x - 4)$
$I = 2x \times x + 2x \times (-4) + 1 \times x + 1 \times (-4)$
$I = 2x^2 - 8x + x - 4$
On réduit : $-8x + x = (-8 + 1) \times x = -7x$
Donc $I = 2x^2 - 7x - 4$.

• $J = (x - 3)(3x - 2)$
$J = x \times 3x + x \times (-2) + (-3) \times 3x + (-3) \times (-2)$
$J = 3x^2 - 2x - 9x + 6$
On réduit : $-2x - 9x = (-2 - 9) \times x = -11x$
Donc $J = 3x^2 - 11x + 6$.

27 On développe à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

• $A = (x + 3)^2$ $\quad a = x$ et $b = 3$
$A = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ soit $A = x^2 + 6x + 9$
• $B = (x + 8)^2$ $\quad a = x$ et $b = 8$
$B = x^2 + 2 \times x \times 8 + 8^2$ soit $B = x^2 + 16x + 64$
• $C = (x + 12)^2$ $\quad a = x$ et $b = 12$
$C = x^2 + 2 \times x \times 12 + 12^2$ soit $c = x^2 + 24x + 144$

28 On développe à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

• $D = (x - 5)^2$ $\quad a = x$ et $b = 5$
$D = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2$ soit $D = x^2 - 10x + 25$
• $E = (x - 2)^2$ $\quad a = x$ et $b = 2$
$E = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2$ soit $E = x^2 - 4x + 4$
• $F = (x - 9)^2$ $\quad a = x$ et $b = 9$
$F = x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2$ soit $F = x^2 - 18x + 81$

29 On développe à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

• $G = (x + 7)(x - 7)$ $\quad a = x$ et $b = 7$
$G = x^2 - 7^2$ soit $G = x^2 - 49$.
• $H = (x - 6)(x + 6)$ $\quad a = x$ et $b = 6$
$H = x^2 - 6^2$ soit $H = x^2 - 36$

34 On développe à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

• $A = (2x + 1)^2$ $\quad a = 2x$ et $b = 1$
$A = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2$
$A = 2x \times 2x + 4x + 1$ soit $A = 4x^2 + 4x + 1$
• $B = (3x + 7)^2$ $\quad a = 3x$ et $b = 7$
$B = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2$
$B = 3x \times 3x + 42x + 49$
soit $B = 9x^2 + 42x + 49$.
• $C = (5x + 9)^2$ $\quad a = 5x$ et $b = 9$
$C = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 9 + 9^2$
$C = 5x \times 5x + 90x + 81$
soit $C = 25x^2 + 90x + 81$.

35 On développe à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

• $D = (3x - 5)^2$ $\quad a = 3x$ et $b = 5$
$D = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$
$D = 3x \times 3x - 30x + 25$ soit $D = 9x^2 - 30x + 25$
• $E = (4x - 3)^2$ $\quad a = 4x$ et $b = 3$
$E = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2$
$E = 4x \times 4x - 24x + 9$ soit $E = 16x^2 - 24x + 9$

- $F = (2x - 0,5)^2$ $\quad a = 2x$ et $b = 0,5$

$F = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 0,5 + 0,5^2$
$F = 2x \times 2x - 2x + 0,25$ soit $F = 4x^2 - 2x + 0,25$.

36 On développe à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- $G = (4x + 5)(4x - 5)$ $\quad a = 4x$ et $b = 5$

$G = (4x)^2 - 5^2$
$G = 4x \times 4x - 25$ soit $G = 16x^2 - 25$

- $H = (3x - 1)(3x + 1)$ $\quad a = 3x$ et $b = 1$

$H = (3x)^2 - 1^2$
$H = 3x \times 3x - 1$ soit $H = 9x^2 - 1$.

38 On factorise à l'aide de la propriété :

$$ka + kb = k(a + b)$$

- $A = 3x - 3$

$A = 3 \times x - 3 \times 1$
(3 est un facteur commun)
$A = 3 \times (x - 1)$ soit $A = 3(x - 1)$

- $B = 4y + 6$

$B = 2 \times 2y + 2 \times 3$
(2 est un facteur commun)
$B = 2 \times (2y + 3)$ soit $B = 2(2y + 3)$

- $C = 8 + 2n$

$C = 2 \times 4 + 2 \times n$
(2 est un facteur commun)
$C = 2 \times (4 + n)$ soit $C = 2(4 + n)$

- $D = 7x^2 - 5x$

$D = 7x \times x - 5 \times x$
(x est un facteur commun)
$D = x \times (7x - 5)$ soit $D = x(7x - 5)$

- $E = 30a + 36a^2$

$E = 6a \times 5 + 6a \times a$
($6a$ est un facteur commun)
$E = 6a \times (5 + a)$ soit $E = 6a(5 + a)$

- $F = -2x^2 - 2$

$F = -2 \times x^2 + (-2) \times 1$
(-2 est un facteur commun)
$F = -2 \times (x^2 + 1)$ soit $F = -2(x^2 + 1)$

40 On factorise à l'aide d'une identité remarquable.

a. Ici on utilise $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$.
$a = 2x$ et $b = 3$ donc
$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$

b. Ici on utilise $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$16x^2 - 40x + 25 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 5 + 5^2$.
$a = 4x$ et $b = 5$ donc
$16x^2 - 40x + 25 = (4x - 5)^2$

c. Ici on utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$9x^2 - 64 = (3x)^2 - 8^2$.
$a = 3x$ et $b = 8$ donc
$9x^2 - 64 = (3x + 8)(3x - 8)$

d. Ici on utilise $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$49 - 70x + 25x^2 = 7^2 - 2 \times 5x \times 7 + (5x)^2$.
$a = 7$ et $b = 5x$ donc
$49 - 70x + 25x^2 = (7 - 5x)^2$

43 **a.** $5x + 7 = 2x - 2$
On regroupe les termes « en x » dans un membre et les termes « sans x » dans l'autre membre.

$$5x + 7 - 2x = 2x - 2 - 2x$$
$$3x + 7 = -2$$
$$3x + 7 - 7 = -2 - 7$$
$$3x = -9$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-9}{3} \text{ soit } x = -3$$

-3 est la solution de l'équation.

b. $3x + 2 = x - 10$

$$3x + 2 - x = x - 10 - x$$
$$2x + 2 = -10$$
$$2x + 2 - 2 = -10 - 2$$
$$2x = -12$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{-12}{2} \text{ soit } x = -6$$

-6 est la solution de l'équation.

57 **a.** $(2x + 7)(3x - 12) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$2x + 7 = 0$	ou	$3x - 12 = 0$
$2x = -7$	ou	$3x = 12$
$x = \frac{-7}{2}$	ou	$x = \frac{12}{3}$
$x = -3,5$	ou	$x = 4$

$-3,5$ et 4 sont les solutions de l'équation.

b. $(5y - 2)(6y + 9) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$5y - 2 = 0$	ou	$6y + 9 = 0$
$5y = 2$	ou	$6y = -9$
$y = \frac{2}{5}$	ou	$y = \frac{-9}{6}$
$y = 0,4$	ou	$y = -1,5$

0,4 et $-1,5$ sont les solutions de l'équation.

60 **a.** $x^2 - 5x = 0$
On factorise le membre de gauche.
$x^2 - 5x = x \times x - x \times 5$ (x est un facteur commun).
$x^2 - 5x = x \times (x - 5)$
Résoudre l'équation $x^2 - 5x = 0$ revient à résoudre l'équation $x(x - 5) = 0$.
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$x = 0$	ou	$x - 5 = 0$
		$x = 5$

0 et 5 sont les solutions de l'équation.

b. $6x^2 - 18x = 0$
On factorise le membre de gauche.
$6x^2 - 18x = 6x \times x - 6x \times 3$ ($6x$ est un facteur commun).
$6x^2 - 18x = 6x \times (x - 3)$
Résoudre l'équation $6x^2 - 18x = 0$ revient à résoudre l'équation $6x(x - 3) = 0$.

Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$6x = 0$ ou $x - 3 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x = 3$

0 et 3 sont les solutions de l'équation.

65 On remplace l'inconnue par -2.

a. Pour $x = -2$:

$1 - 2x = 1 - 2 \times (-2) = 1 + 4 = 5$

$5 > 2$ donc -2 n'est pas solution de l'inéquation.

b. Pour $t = -2$:

- $2t - 3 = 2 \times (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$
- $t - 5 = -2 - 5 = -7$

On trouve le même résultat pour les deux membres ; or le symbole d'inégalité de l'inéquation se lit « est strictement supérieur à » donc -2 n'est pas solution de l'inéquation.

c. Pour $x = -2$:

- $4x + 2 = 4 \times (-2) + 2 = -8 + 2 = -6$
- $2x - 3 = 2 \times (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$

$-6 > -7$ donc -2 est une solution de l'inéquation.

67 **a.** $x - 3 > 2$

On regroupe les termes « en x » dans un membre et les termes « sans x » dans l'autre membre.

$$x - 3 + 3 > 2 + 3$$
$$x > 5$$

Les nombres strictement supérieurs à 5 sont les solutions de l'inéquation.

b. $y + 4 \leqslant 1$

$y + 4 - 4 \leqslant 1 - 4$

$y \leqslant -3$

Les nombres inférieurs ou égaux à -3 sont les solutions de l'inéquation.

c. $2 - x < 5$

$2 - x - 2 < 5 - 2$

$-x < 3$

On multiplie chaque membre par -1, qui est un nombre négatif, donc on change le sens de l'inégalité.

$-x \times (-1) > 3 \times (-1)$

$x > -3$

Les nombres strictement supérieurs à -3 sont les solutions de l'inéquation.