

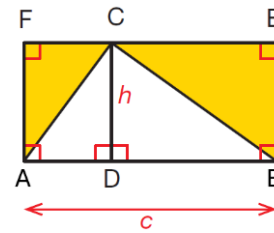
ABC est un triangle.

Le segment [CD] est la hauteur issue du sommet C associée au côté [AB].

On note $AB = c$, $CD = h$ et $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

ABEF est le rectangle tel que : $C \in [EF]$.

On se propose de démontrer que $\mathcal{A} = \frac{c \times h}{2}$.



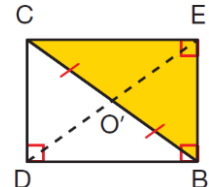
1. Les quadrilatères ADCF et BDCE sont des rectangles, donc leurs diagonales se coupent en leurs milieux O et O'.

2. Le symétrique du triangle ADC par rapport au point O est le triangle CFA.



Une symétrie centrale conserve les aires, donc les aires des triangles ADC et CFA sont égales.

3. Le symétrique du triangle BDC par rapport au point O' est le triangle CEB.



Une symétrie centrale conserve les aires, donc les aires des triangles BDC et CEB sont égales.

4. L'aire $\mathcal{B}$ du rectangle ABEF peut s'écrire :

$$\mathcal{B} = \text{aire}(\text{CFA}) + \text{aire}(\text{ADC}) + \text{aire}(\text{BDC}) + \text{aire}(\text{CEB}).$$

Donc d'après 2 et 3 :

$$\mathcal{B} = 2 \times \text{aire}(\text{ADC}) + 2 \times \text{aire}(\text{CEB}).$$

D'après la règle de distributivité :

$$\mathcal{B} = 2 \times (\text{aire}(\text{ADC}) + \text{aire}(\text{CEB})).$$

Or $\text{aire}(\text{ADC}) + \text{aire}(\text{CEB}) = \text{aire}(\text{ABC}) = \mathcal{A}$, donc $\mathcal{B} = 2 \times \mathcal{A}$.

5. Conclusion

On en déduit que $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{B}}{2}$.

Or $\mathcal{B} = AB \times AF$, c'est-à-dire $\mathcal{B} = AB \times CD$, soit $\mathcal{B} = c \times h$.

Ainsi, $\mathcal{A} = \frac{c \times h}{2}$.

On vient ainsi de démontrer la propriété suivante : l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la longueur d'un côté par la hauteur associée.